

令和7年度大学院入学試験問題

数学

令和6年7月14日

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2+t & 1 \\ 6 & 3+t \end{pmatrix}$ (t は実数) に関して以下の問いに答えよ.

- (1) t が変化するとき, 行列 A の一次変換による点 $(-1, 2)$ の像の軌跡を求めよ.
- (2) 点 $(5, 0)$ から(1)で求めた軌跡までの距離を最小にする t の値を求めよ.
- (3) (2)で求めた行列 A の固有値と, 各固有値に対する単位の固有ベクトルを求めよ.

2. 複素数に関する以下の問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする.

(1) 次の集合を図示せよ.

$$\left\{ z \mid |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 4 \right\}$$

(2) 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\bar{z} + 3z - \bar{z} - 3}{z^2 - 1}$$

(3) 次の曲線を描け.

$$z(t) = 1 - i + 2e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

3. 2変数関数 $z = \tan^{-1}(u + v)$ について

- (1) $u = x, v = 0$ とするとき $\frac{dz}{dx}$ を求めよ.
- (2) $u = e^t, v = e^{-t}$ とするとき $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.
- (3) $u = x^2 - y^2, v = 2xy^2$ とするとき $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ を求めよ.

4. 関数 $F(s)$ を $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ と定義する. $f(t)$ が以下の関数の場合の $F(s)$ を求めよ. なお, (3)については(1),(2)の結果を使用して求めてもよい.

- (1) $f(t) = e^{at}$
- (2) $f(t) = t^2$
- (3) $f(t) = t^2 e^{-t}$