4次元的空間内での結び目解消数の研究

Study on the unknotting numbers in the 4-space

丸　本　嘉　彦
Yoshihiko MARUMOTO

4次元ユークリッド空間内にある2次元曲面は一般には複雑に自分自身に絡みついている。この状況を記述するために、これまでに考えられてきたのは

1．曲面自身の結び目としての複雑さを表現する
2．空間自体を、この曲面に沿って「手術」を行うことにより得られた多様体の複雑さを表現する

という2つの側面であった。

高次元結び目の研究ではこれまで1の手法は行われることが多く、実際2の方法ではほとんど結果は得られていなかった。本件研究では2でのアプローチから、高次元結び目の複雑さを表示することを目的とした。

3次元ユークリッド空間で同様な、結び目に沿った手術により得られる多様体の研究は依然として活発に行われており、多くの未解決問題も残されている。一方、次元が高い、たとえば4次元空間内での同様の研究は1960年代でのGluckによる研究とそれ以後のいくつかの結果しか得られておらず、ほとんどが未知の状態であると言える。

Gluckの結果の一つは、ある条件を満たす2次元結び目にそった4次元空間の手術により得られる多様体は元の多様体（すなわち、4次元空間）と一致するということである。これは手術理論を展開するための出発点であるが、本質的にこれ以上の結果はいまだ得られていない。

本研究では、4次元多様体中にある2次元球面を考え、この結び目にそって手術（2つある場合の自明でないものをGluck手術とよぶ）を行ったとき、どのような多様体が得られるかについて研究を行った。Gluck手術により得られる多様体は、元の多様体とホモトピー型が一致しており、この2つの多様体を区別したり、あるいは同一であることを示すことが容易ではない。

我々は、banded knotとよぶ、2つの成分からなる絡み輪をバンドにより「1融合」した 結び目について考察した。得られた結果は次である。

定理　band knotについてGluck手術を行った4次元多様体と、この2成分についてGluck手術して得られた4次元多様体とは同一である。

この定理により、4次元ユークリッド空間内のリボン結び目についてのGluck手術でで

きる多様体は再び４次元ユークリッド空間であるというよく知られた結果が導かれる。この知られていた結果自体は、Gluckの結果を用いて導かれるが、我々の結果はこれの別証明を与えられていることにもなる。

証明のアイデアは、banded knotの結び目解消操作を、具体的な別の幾何学的操作で実現 できることを示し、この新しい幾何学的操作とGluck手術との関係を詳しく調べ、この手術によって得られる多様体がどのように構成されるかを解析することである。

ここで用いた証明の技法は、banded knotの幾何学的性質を今後さらに明らかにできることの可能性を持ったものであり、この観点からの高次元結び目研究は今後の課題となる。なお、本研究結果はProceedings of the Int. Conf. on knot theory, world scientific, vol.24, p.80-93で印刷公表されている。