

3次元空間における形状最適化問題と その解および十分条件

Solutions and sufficient condition of shape optimization
problems in three-dimensional space

藤井 信夫

Nobuo FUJII

境界値問題（2階の偏微分方程式とそれに対する境界条件からなる問題）の解の汎関数は、その解を通じて境界値問題の定義されている（空間）領域に依存する。同時に汎関数を与える積分を通じて同じ領域に依存する。そこでこの汎関数を最小（または最大）にする領域の形状を求める問題を形状最適化問題と呼んでいる。この問題は古く、19世紀の中頃機械工学者St.Venantによって「一様な断面形状をもつ等方的な弾性棒の捻り剛性を最大にする断面形状はどのようなものか」が提起され、物理学的考察によって「答えは円」と予測された。その後20世紀中頃、応用数学者G.Polyaによってこの解答の数学的証明が（不完全ながら）与えられた。一般の形状最適化問題については報告者を含めた多くの研究者が最適性の（1次の）必要条件について研究した。また報告者を中心とする研究者によって2次の必要条件が研究された。さらに報告者およびロシア人研究者S.Belovによって十分条件についての研究がなされ、問題のもつ（幾何学的）対称性が高い場合に対して重要な補題を見出し、この補題を応用して最適性の十分条件を与え、円が最適化問題の解であることを厳密に示すことに成功した。捻り剛性最大化問題の最終的解決も与えた。なお、数値解法や最適解の存在などについての研究も散見される。

以上の研究は2次元ユークリッド空間の領域の形状に関するものであった。そこで本研究では3次元ユークリッド空間における形状最適化問題に対する十分条件を研究し、どのような場合に球が最適解になるかを明らかにすることが目的である。3次元になると、問題の解析の困難性は飛躍的に増大し時には絶望的にさえなる。しかしながら、上記の補題の3次元versionは極めて簡単に逐語的に証明できることがわかった。そこで、これを頼りに汎関数が解の2次式の積分で与えられる場合について解析を行い、球が最小を与える場合、最大を与える場合、問題の対称性にも拘わらず最小も最大も与えない場合を明らかにした。さらに、導体のキャパシタンスが最小となる形状は何かと言う問題を研究した。勿論この場合導体の体積は一定に保たれる。この問題は境界値問題の解の勾配を汎関数の中に含む問題であって汎関数が特別な形をしているので解析可能であって、球が厳密に（つまり、球から形が少しでも歪むとキャパシタンスが増大する）最適解であることを示した。また、これらの解析手法を帯水層に含まれる水の体積を最大にする問題に応用し、円形のマウンドが最適であることを示し、最大帯水量を求めた [1]。

参考文献

- [1] S. Belov, N. Fujii, and A. Kacimov, *Extreme capacity of unconfined aquifers with accretion*, Groundwater Updates, K. Sato and Y. Iwasa (eds.), Springer-Verlag TOKYO, 2000.